

astrofizyka układów planetarnych

lista 4

1. Znając średnią gęstość oraz promień Merkurego, Księżyca, Io i Tytana (tabela poniżej) zrekonstruu ich budowę wewnętrzną. Oceń w jakiej części mogą się składać z następujących frakcji: frakcja lodowa (gęstość 1 g/cm^3), frakcja skalna (gęstość 3 g/cm^3) i frakcja metaliczna (gęstość 8 g/cm^3). Wynik podaj w postaci: jaką część promienia i objętości obiektu zajmuje dana frakcja. Porównaj wyniki z Ziemią. W rozwiązaniu załóż, że we wnętrzu obiektu nie dochodzi do kompresji (zwiększenia gęstości) materiału budulcowego. Wybierając frakcje, uwzględnij odległość danego obiektu od Słońca i informacje na temat jego powierzchni.

obiekt	promień [km]	średnia gęstość [g/cm^3]
Merkury	2440	5.43
Księżyc	1737	3.34
Io	1822	3.53
Tytan	2575	1.88

2. Załóżmy, że materiał może zostać znacząco ściśnięty, jeśli ciśnienie przewyższa jego wytrzymałość. Gdy materia wewnątrz jakiegoś obiektu ulegnie takiemu ściśnięciu w dużej części objętości, obiekt ten przyjmie kształt kulisty (najniższa energia potencjalna dla plastycznego ciała nierotującego).
- Policz, jaki powinien być minimalny promień ciała skalistego, aby doszło do znaczącego ściśnięcia materii w jego środku. Załóż, że jego nieskompresowana gęstość wynosi 3 g/cm^3 , a wytrzymałość materii $S_m = 2 \times 10^9 \text{ dyn/cm}^2$.
 - Oblicz minimalny promień ciała skalistego (takiego samego, jak w powyższym przypadku) potrzeby do znaczącego ściśnięcia materii w obszarze zawierającym około połowy masy tego ciała.
 - Powtórz powyższe obliczenia dla ciała lodowego, którego nieskompresowana gęstość wynosi 1 g/cm^3 , a wytrzymałość materii $S_m = 5 \times 10^7 \text{ dyn/cm}^2$.
3. Wykorzystaj podane na wykładzie dwa wzory, pozwalające w przybliżeniu oszacować ciśnienie centralne w obiektach planetarnych znajdujących się w stanie równowagi hydrostatycznej, do obliczenia tego ciśnienia dla Księżyca, Ziemi i Jowisza. Porównaj otrzymane wyniki z bardziej szczegółowymi obliczeniami (Księżyc – 45 kbar, Ziemia – 3.6 Mbar, Jowisz – 80 Mbar). Wyciągnij wnioski. Pamiętaj o założeniach/uproszczeniach przyjętych przy wyprowadzaniu użytych wzorów.
4. Przybliżmy strukturę wewnętrzną Ziemi dwoma warstwami: jądro o stałej gęstości sięgające do $0.57 R_z$ otoczone płaszczem również o stałej gęstości. Średnia gęstość Ziemi wynosi 5.52 g/cm^3 , a normalizowany biegunowy moment bezwładności $I/MR^2 = 0.331$. Planeta jest w równowadze hydrostatycznej.
- Korzystając z równania na moment bezwładności, wyznacz gęstość jądra i płaszcz Ziemi. Wyniki porównaj z wartościami z modelu PERM (patrz materiały z wykładu).
 - Korzystając z równania równowagi hydrostatycznej dla planety złożonej z dwóch warstw (jądro i płaszcz), wyznacz ciśnienie w centrum Ziemi i porównaj wyniki z otrzymanymi w zadaniu 3.
5. Moment bezwładności dla sferycznej planety można opisać następująco:

$$I = \frac{8}{3} \pi \int \rho(r) r^4 dr$$

gdzie $\rho(r)$ jest profilem gęstościowym dla wnętrza planety (jak otrzymać ten wzór?). Oblicz normalizowany biegunowy moment bezwładności I/MR^2 dla planety, która:

- jest jednorodną sferą o promieniu R i gęstości ρ ,
 - ma taką samą masę i promień jak powyższa, ale której wewnątrz dzieli się na jądro o promieniu $R/2$ i gęstości 2 razy większej niż położony nad nim płaszcz.
6. a) Policz normalizowany biegunowy moment bezwładności I/MR^2 dla Ziemi i Jowisza korzystając z przybliżenia Radau-Darwina. Porównaj wyniki z wartościami rzeczywistymi: Ziemia – 0.33, Jowisz – 0.254.
- b) Zaproponuj profil gęstościowy $\rho(r)$ dla wnętrza tych planet dający obserwowany normalizowany biegunowy moment bezwładności. Wskazówka: wybierz profil opisany prostą, łatwo całkowaną funkcją.

7. Przeanalizuj budżet wewnętrznego ciepła Ziemi:
- Wyznacz całkowitą energię traconą przez wnętrze Ziemi w jednostce czasu wiedząc, że średni strumień ciepła płynącego z jej wnętrza wynosi 0.075 W/m^2 .
 - Oblicz całkowitą energię termiczną wnętrza Ziemi, $E_t = 3NkT$, gdzie: T to średnia temperatura wnętrza planety (3000 K), N – całkowita liczba atomów, z których zbudowana jest Ziemia, k – stała Boltzmann (1.38×10⁻²³ J/K). Przyjmij, że średnia masa atomów wewnątrz Ziemi wynosi $40m_p$ (m_p to masa protonu, 1.67×10^{-27} kg), a masa Ziemi to 5.97×10^{24} kg.
 - Oblicz, na jak długo wystarczyłoby energii termicznej przy jej obecnych stratach (czas stygnięcia Ziemi) i braku źródeł w postaci np. grzania radiogenicznego. Przedyskutuj otrzymany wynik.
8. Średnia produkcja ciepła radiogenicznego z ziemskich granitów wynosi $2.9 \mu\text{W/m}^3$. Wyznacz całkowitą energię produkowaną przez ziemski granit w ciągu 1 sekundy, jeżeli stanowi on 1/3 skał powierzchniowych do głębokości 30 km. Porównaj to z energią otrzymywaną (pochłanianą) w ciągu 1 sekundy przez Ziemię od Słońca.
9. Załóżmy, że radioaktywność Ziemi była pierwotnie 4 razy większa niż obecna wynosząca $2.9 \mu\text{W/m}^3$ i była jednorodnie rozproszona w całej objętości naszej planety. Policz, ile energii wydzieliło się w ciągu pierwszych 500 milionów lat. O ile wzrosła w skutek tego temperatura wnętrza Ziemi? Jakie skutki mogło mieć to ciepło radiogeniczne dla struktury Ziemi.
10. Strumień ciepła płynącego z wnętrza Saturna wynosi $2010 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.
- Policz, ile energii wypromieniowała ta planeta od początku swojego istnienia, jeżeli wypromieniowany strumień nie zmieniał się w czasie.
 - Zakładając, że źródłem tej energii jest spływ helu z gazowej otoczki planety na jej skalno-lodowe jądro (deszcz helowy) oblicz, ile energii wydzieliłoby się gdyby cały hel zawarty w otoczce osiadł na powierzchni jądra.
- Porównaj wyniki otrzymane w punktach a) i b) oraz wyciągnij wnioski. Przyjmij, że masa jądra Saturna stanowi 15% masy planety, a jego rozmiar - 25% jej promienia. Hel stanowi 25% masy otoczki gazowej planety.
11. Dla Plutona oblicz stosunek energii produkowanej z rozpadu promieniotwórczego do energii otrzymywanej ze Słońca. Załóż, że Pluton składa się z frakcji skalnej i lodowej w stosunku 6:4. Energia wydzielana przez frakcję skalną wynosi $2.9 \mu\text{W/m}^3$, a albedo Plutona 0.5. Zastanów się na możliwości detekcji na odległość emisji własnej Plutona wynikającej z istnienia ciepła wewnętrznego.