Pracownia Astronomiczna

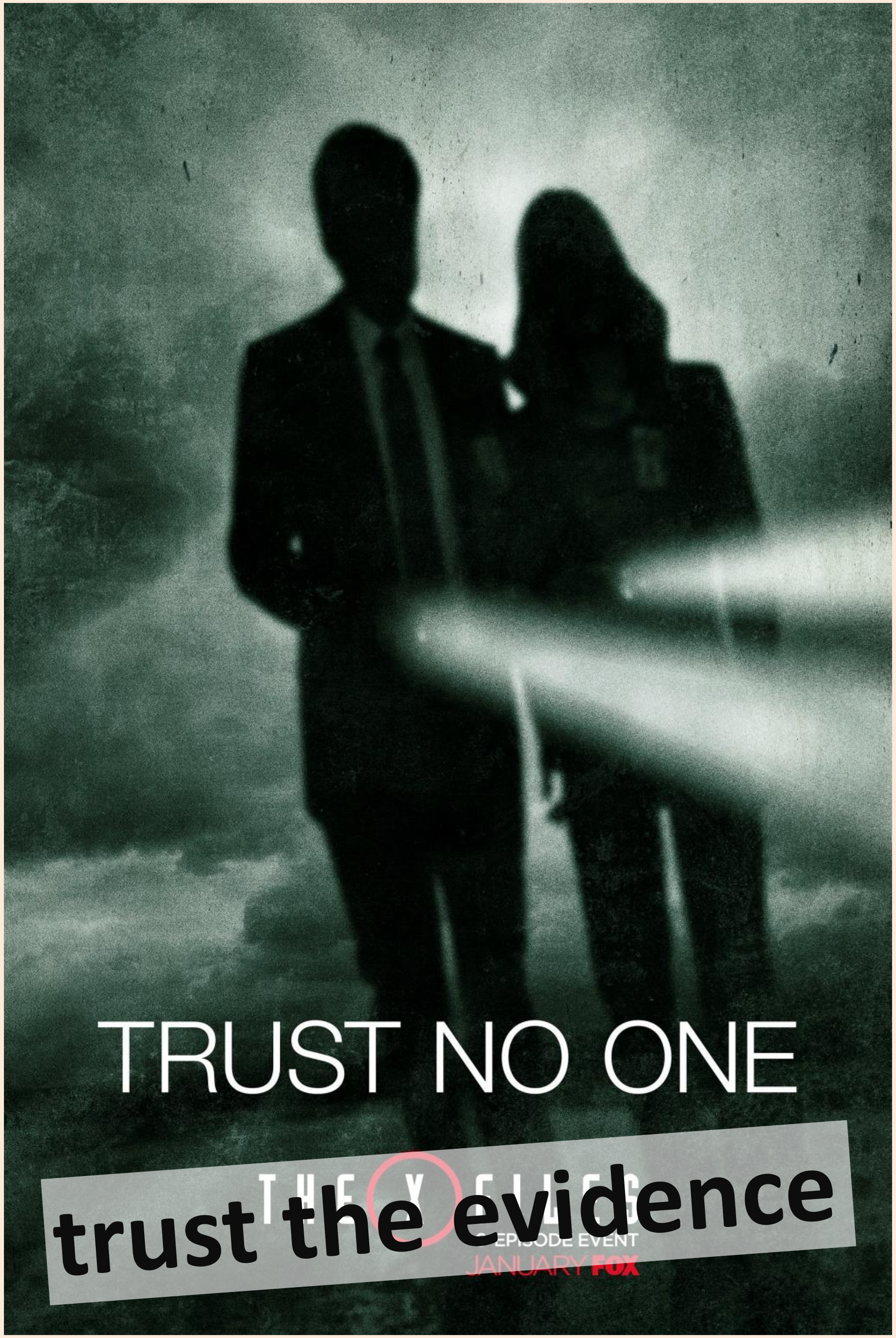
(1)
analiza wyników pomiarów i ich niepewności

Jedyna pewność w nauce to niepewność

It is imperative in science to doubt; it is absolutely necessary, for progress in science, to have uncertainty as a fundamental part of your inner nature. To make progress in understanding, we must remain modest and allow that we do not know. ***Nothing is certain or proved beyond all doubt.*** *You investigate for curiosity, because it is unknown, not because you know the answer. And as you develop more information in the sciences, it is not that you are finding out the truth, but that you are finding out that this or that is more or less likely.*

That is, if we investigate further, we find that the statements of science are not of what is true and what is not true, but statements of what is known to different degrees of certainty… ***Every one of the concepts of science is on a scale graduated somewhere between, but at neither end of, absolute falsity or absolute truth.***

Richard Feynman



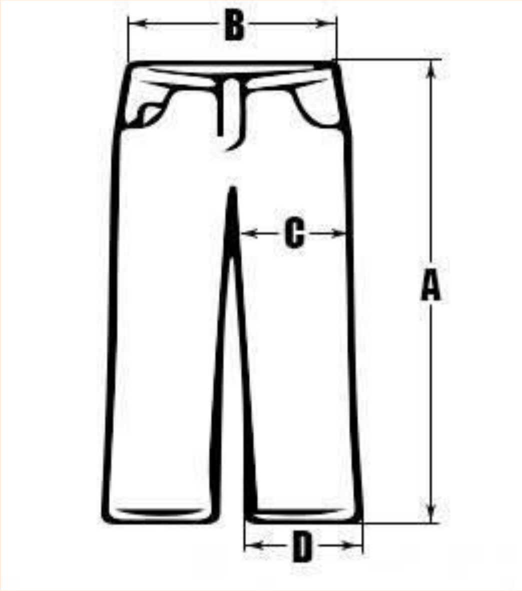
w nauce

opinie i poglądy są nieistotne

nikt nie jest nieomylny

liczą się dowody

Każdy pomiar obarczony jest błędami



Co wpływa na dokładność pomiaru, skąd się biorą niepewności?

- Warunki podczas prowadzenia pomiaru (np. oświetlenie)
- Jakość/dokładność narzędzi użytych do pomiaru (np. podziałka na taśmie mierniczej)
- Czy mierzona wielkość jest dobrze zdefiniowana (np. zmienia się wraz z warunkami otoczenia lub miejsca pomiaru)

Znaczenie niepewności pomiarów

W sytuacjach życia codziennego wiedza na temat niepewności zwykle nie ma znaczenia.

W nauce ma ona jednak znaczenie kluczowe.

Przykład:

Chcemy dowiedzieć się czy nowoodkryta planetoida jest obiektem skalnym czy lodowym.

Materia skalna ma średnią gęstość ok. 3 g/cm^3, lodowa natomiast ok. 1 g/cm^3.

Z dwóch niezależnych analiz otrzymano następujące wyznaczenie średniej gęstości tej planetoidy:

2.7 g/cm3

1.2 g/cm3

Znaczenie niepewności pomiarów

W sytuacjach życia codziennego wiedza na temat niepewności zwykle nie ma znaczenia.

W nauce ma ona jednak znaczenie kluczowe.

Przykład:

Chcemy dowiedzieć się czy nowoodkryta planetoida jest obiektem skalnym czy lodowym.

Materia skalna ma średnią gęstość ok. 3 g/cm^3, lodowa natomiast ok. 1 g/cm^3.

Z dwóch niezależnych analiz otrzymano następujące wyznaczenie średniej gęstości tej planetoidy (wraz z ich niepewnościami):

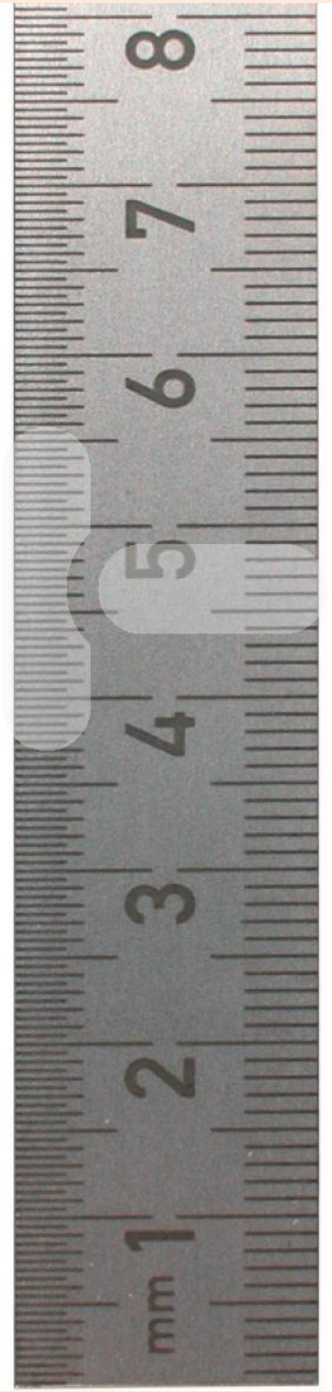
(2.7 ± 1.7) g/cm^3 wartość prawdziwa w zakresie: 1.0 – 4.4 g/cm^3

(1.2 ± 0.3) g/cm^3 wartość prawdziwa w zakresie: 0.9 – 1.5 g/cm^3

Jak obliczyć niepewności pomiarowe?

- Ocena niepewności przy odczycie skali (na „oko”, zdrowy rozsądek).

  Przykład: pomiar długości wykonany skalą z podziałką lub pomiar napięcia prądu woltomierzem.



Najbliższy znacznik podziałki (najlepsze przybliżenie): 57 mm
Prawdopodobny zakres: 56.5 – 57.5 mm
Prawdopodobna niepewność pomiaru: 0.5 mm *

Najbliższy znacznik podziałki (najlepsze przybliżenie): 37.5 V
Prawdopodobny zakres: 37.0 – 38.0 V
Prawdopodobna niepewność pomiaru: 0.5 V *

* Tu jest to połowa najmniejszej działki. Czasem niepewność jest brana jako cała najmniejsza działka

Jak obliczyć niepewności pomiarowe?

- Wyznaczanie niepewności przez pomiar wielokrotny.

  Przykład: pomiar czasu stoperem okresu wahadła.

  Kolejne pomiary okresu wahań dają: 2.3, 2.4, 2.5, 2.3 [s]

  Wartość średnia (najlepsze przybliżenie): 2.4 s

  Prawdopodobny zakres: 2.3 – 2.5 s

  Prawdopodobna niepewność pomiaru: 0.1 s

Zapisywanie wyników pomiarów

Każdy pomiar podawany jest łącznie z niepewnością. Pozwala to na ocenę jego jakości.

najlepsze przybliżenie wartości mierzonej (prawdziwej) ± niepewność pomiaru

$$\boldsymbol{x \pm \delta x}$$

Przykład:

Kolejne pomiary okresu wahań dają: 2.3, 2.4, 2.5, 2.3 [s]

Wartość średnia (najlepsze przybliżenie): 2.4 s

Prawdopodobna niepewność pomiaru: 0.1 s

okres wahań, t $= \mathbf{2.4 \pm 0.1}\ \boldsymbol{s}$

Rzeczywisty okres wahań znajduje się z pewnym prawdopodobieństwem (mniejszym niż 100%) w przedziale zdefiniowanym przez niepewność pomiaru:

$$\boldsymbol{(\ x - \delta x, x + \delta x\ )}$$

(2.3, 2.5) s

Zapisywanie wyników pomiarów

Przy zapisie musimy pamiętać, że wynik musi być zapisany zgodnie z precyzją, z jaką jest znany. Tu stosujemy zasadę cyfr znaczących:

Zaokrąglany niepewność pomiarową do dwóch[1] cyfr znaczących i dostosowujemy do niej precyzję zapisu pomiaru przez zaokrąglanie[2].

Cyfry znaczące to te, które mają znaczenie fizyczne (są uzasadnione niepewnością pomiaru).

Przykład:

$$g = 9.824 \pm 0.02\underset{\uparrow}{3}25\ \mathrm{m/s^2} \quad \rightarrow \quad g = 9.824 \pm 0.023\ \mathrm{m/s^2}$$

$$R = 6051.78 \pm 3\underset{\uparrow}{0}\ \mathrm{km} \quad \rightarrow \quad R = 6052 \pm 30\ \mathrm{km}$$

1) Zasada przyjęta np. w zapisywaniu podstawowych stałych fizycznych (np. baza CODATA). Pozwala ona też minimalizować błędy zaokrąglania.
2) Ostatnia cyfra znacząca w każdym wyniku powinna być tego samego rzędu co druga cyfra znacząca niepewności pomiarowej .

Zapisywanie wyników pomiarów

Przykłady

Wartość niepewności pomiarowej określa liczby znaczące w wyniku**:**

$$x = 92.812$$

$$x = 92.81, \delta x = 0.32$$

$$x = 92.8, \delta x = 3.2$$

$$x = 93, \delta x = 32$$

Dla bardzo dużych i małych liczb stosujemy zapis wykładniczy, najlepiej w tej samej formie dla wyniku i niepewności:

$$d = 1.496 \cdot 10^8 \pm 4.6 \cdot 10^6 \text{ km} \quad \rightarrow \quad d = (1.496 \pm 0.046) \cdot 10^8 \text{ km}$$

Uwaga: unikamy zaokrąglania liczb, które używamy dalszych w obliczeniach.
Pozwala to uniknąć błędów zaokrągleń.
Zaokrąglamy tylko wynik końcowy.

Zapisywanie wyników pomiarów

Zasady zaokrąglania:

- Jeśli pierwsza cyfra do odrzucenia jest mniejsza niż 5, usuwany cyfry nieznaczące

  przykład (złóżmy, że ostatnią cyfrą znaczącą jest pierwsza cyfra „po przecinku”):

$$5.326 \rightarrow 5.3$$

- Jeśli pierwsza cyfra do odrzucenia jest większa niż 5, usuwając cyfry nieznaczące i podnosimy wartość ostatniej cyfry znaczącej o 1

  przykład (złóżmy, że ostatnią cyfrą znaczącą jest pierwsza cyfra „po przecinku”):

$$5.386 \rightarrow 5.4$$

- Jeśli pierwsza cyfra do odrzucenia jest równa 5, zaokrąglamy ostatnią cyfrę znaczącą do najbliższej cyfry parzystej. To ogranicza wpływ błędów zaokrąglania na ewentualne dalsze obliczenia wykonane z wykorzystaniem zaokrąglonych liczb.

  przykład (złóżmy, że ostatnią cyfrą znaczącą jest pierwsza cyfra „po przecinku”):

$$7.550 \rightarrow 7.6$$
$$7.650 \rightarrow 7.6$$

Zapisywanie wyników pomiarów

Dalsze przykłady:

dobrze: $\mathbf{10.47 \pm 0.23}$ **źle:** 10.47 ± 0.232, 10.5 ± 0.23, 10.473 ± 0.23

4200 ± 43 wynik ma 4 cyfry znaczące, w tym 2 zera

4200 ± 1500 wynik 2 cyfry znaczące (4 i 2), zera nie są znaczące z powodu wielkości niepewności

4214 ± 1500 zły zapis, cyfry 1 i 4 nie są znaczące

Istotne uwagi. W poprawnie zapisanym wyniku końcowym wraz z niepewnością:

- Wszystkie cyfry niezerowe są znaczące.
- Wszystkie zera między cyframi niezerowymi są znaczące (np. 1507 – tu wszystkie cyfry są znaczące).
- Zera poprzedzające nie są znaczące (np. 0.056 ma tylko 2 cyfry znaczące 5 i 6).
- Zera następujące po kropce dziesiętnej są znaczące (np. 14.0 ma 3 cyfry znaczące w tym końcowe zero).
- Zera następujące przed kropą dziesiętną mogą być znaczące (np. 4200 w powyższym przykładzie)

Zapisywanie wyników pomiarów

Przykłady – zapisz wyniki we właściwej postaci (już rozwiązane):

$$v = 8.123257 \pm 0.0312 \text{ m/s}$$

$$v = 8.123 \pm 0.031 \text{ m/s}$$ ± 0.032

$$x = 3.1325 \cdot 10^3 \pm 2.23 \text{ m}$$

$$x = 3132.5 \pm 2.2 \text{ m}$$
$$x = (3.1325 \pm 0.0022) \cdot 10^3 \text{ m}$$ ± 0.0023

$$m = 5.6778 \cdot 10^{-5} \pm 3.05 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

$$m = (5.678 \pm 0.030) \cdot 10^{-5} \text{ kg}$$ ± 0.031

Czasem przy zaokrąglaniu niepewności pomiarowej stosuje się stałe zaokrąglanie do góry w celu uniknięcia zaniżenia niepewności.
W powyższych przykładach wygląda to tak

Rozbieżności, porównania wartości zmierzonych

W analizie ilościowej otrzymany wynik porównywany jest z innymi wartościami. Z czym możemy porównać otrzymaną przez nas wartość:

- z wartością uznaną (literaturową, „prawdziwą")
- z wartością przewidzianą teoretycznie
- z wartością wyznaczoną innych obserwacji/innych metod analizy/w innym czasie/…

Porównanie pozwala wyciągnąć odpowiednie wnioski. W porównaniu kluczową rolę odgrywa niepewność pomiarowa.

Rozbieżność między porównywanymi wartościami jest **różnicą** między nimi.

Rozbieżność może być znacząca lub nieznacząca. W tym drugim przypadku wartości są zgodne ze sobą w granicy niepewności pomiarowej. Rozbieżność znacząca może wynikać z wielu przyczyn:

- błędy obliczeniowe lub pomiarowe (w tym systematyczne),
- niewłaściwe oszacowanie niepewności pomiarowej,
- porównanie z nieodpowiednią wartością,
- błędy systematyczne.

Przyczyny rozbieżności mogą też być rzeczywiste, fizyczne.

Znalezienie przyczyn rozbieżności znaczącej wymaga uważnego sprawdzenia przeprowadzonej analizy.

Rozbieżności, porównania wartości zmierzonych

Przykłady (porównanie dwóch wartości zamierzonych, natężenie prądu [A]):

$I_1 = 16.0 \pm 1.0$ A

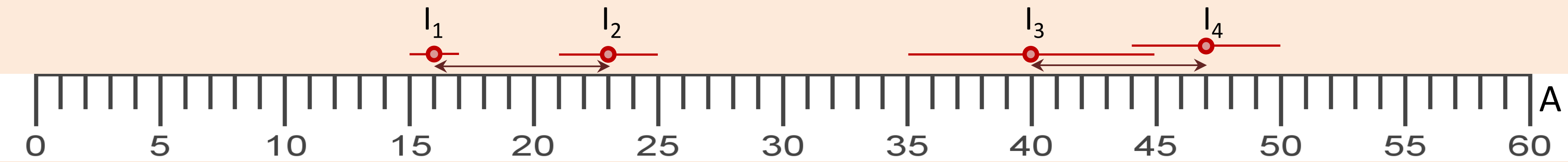
$I_2 = 23.0 \pm 2.0$ A

rozbieżność R=7 A, znacząca
(większa od sumy niepewności pomiarowych 7.0 > 1.0 + 2.0)

$I_3 = 40.0 \pm 5.0$ A

$I_4 = 47.0 \pm 3.0$ A

rozbieżność R=7 A, nieznacząca
(mniejsza od sumy niepewności pomiarowych 7.0 < 5.0 + 3.0)
(wartości zgodne ze sobą w granicy niepewności)



Ważne: oceniamy nie tylko różnicę między pomiarami, ale też jak ta różnica ma się do niepewności pomiarowych.

Rozbieżności, porównania wartości zmierzonych

Z pewnym prawdopodobieństwem (ale nie 100%) szukana wartość prawdziwa (uznana) znajduje się w przedziale:

$$(\, x - \delta x, x + \delta x \,)$$

Może jednak być „nieco” poza nim. Dlatego, w przypadku gdy wartości uznana jest „nieco” poza powyższym przedziałem, można w mówić o zgodności wartości zmierzonej z uznaną.

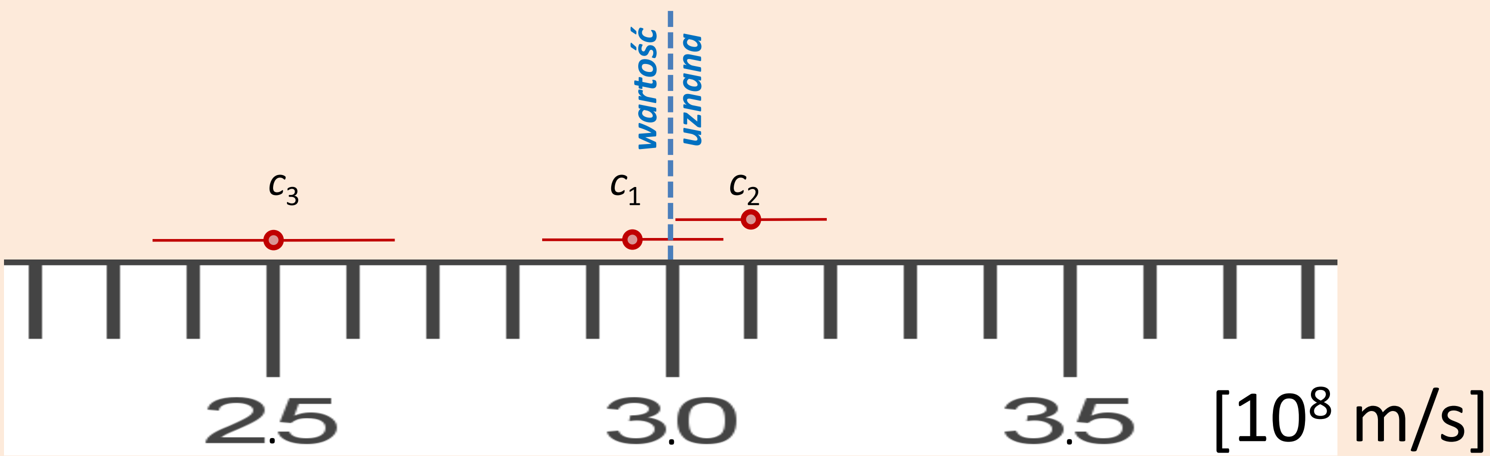
Przykład (porównanie wartości zamierzonej z uznaną):

$c = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s wartość uznana prędkości światła w próżni

$c_1 = (2.95 \pm 0.12) \cdot 10^8$ m/s wartość uznana w granicach niepewności zgodność

$c_2 = (3.10 \pm 0.10) \cdot 10^8$ m/s wartość uznana tuż poza granicą niepewności zgodność

$c_3 = (2.50 \pm 0.15) \cdot 10^8$ m/s wartość uznana daleko poza granicą niepewności niezgodność



Niepewność względna

Oprócz standardowej niepewności (bezwzględnej) $\boldsymbol{\delta x}$, używanej w zapisie:

$$x \pm \delta x$$

Używamy jeszcze niepewności względnej:

$$niepewność\ względna = \frac{\delta x}{x}$$

oraz niepewności względnej procentowej:

$$niepewność\ względna\ procentowa = \frac{\delta x}{x} \cdot 100\%$$

Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową i niesie informację o jakości pomiaru.

Przykład:

$x = 100.0 \ \pm 1.0$ cm $\quad \frac{\delta x}{x} = 0.01\ (= 1.0\%)$ (mała niepewność względna, pomiar dokładny)

$x = 5.0 \ \pm 1.0$ cm $\quad \frac{\delta x}{x} = 0.2\ (= 20\%)$ (duża niepewność względna, pomiar zgrubny)

uwaga: przy zapisie niepewności względnej można zachować zasadę dwóch cyfr znaczących

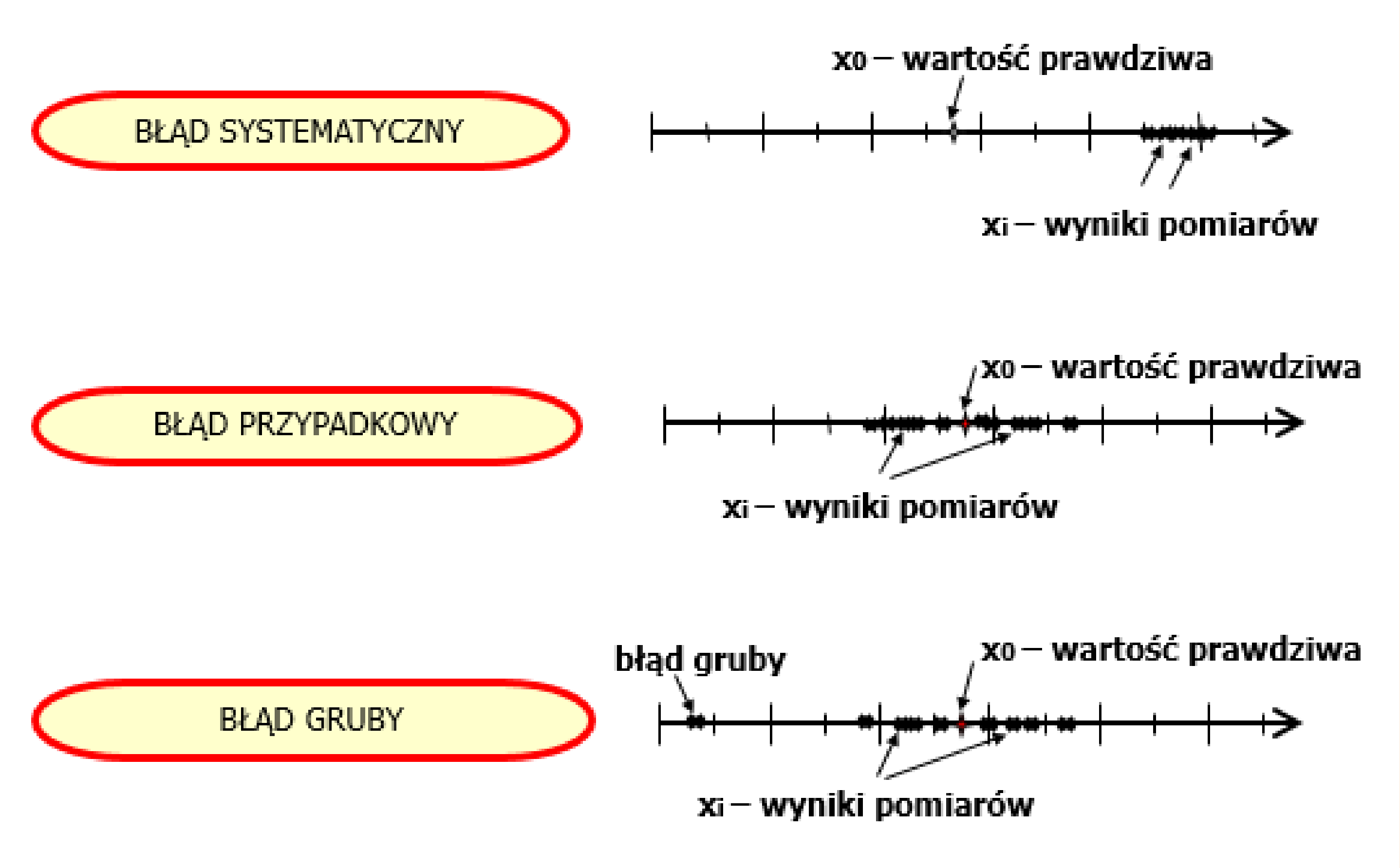
Wielkość, wartość, pomiaru

- Wielkość (mierzalna) - cecha zjawiska, ciała lub substancji, którą można wyróżnić jakościowo i wyznaczyć ilościowo (długość, czas, masa, temperatura, opór elektryczny).
- Wartość (wielkości) - wyrażenie ilościowe wielkości.
- Wartość prawdziwa (wielkości) - wartość, jaką uzyskałoby się jako wynik bezbłędnego pomiaru. **Jest ona nieznana**, ale zakładamy, że istnieje (co nie zawsze musi być prawdą).
- Wartość umownie prawdziwa - wartość przypisana danej wielkości i uznana, niekiedy umownie, jako wartość wyznaczona z niepewnością akceptowaną w danym zastosowaniu. Inne stosowane nazwy: wartość przypisana, wartość umowna, wartością odniesienia.
  Przykład: wartość stałej Avogardo, N_A: 6.0221367 x 10^{23} mol^{-1}. (CODATA, 1986).
- Pomiar - zbiór operacji mających na celu wyznaczenie wartości wielkości.

Przyczyny błędów w pomiarach

- Ograniczenia instrumentalne – każdy przyrząd pomiarowy jest wykonany ze ograniczoną dokładnością.
- Błędy przypadkowe (losowe) – wynikają z różnych przyczyn losowych (nieprzewidzianych, nieznanych), np. z niezauważonych drobnych zmian w czasie pomiarów. Zachowanie tych błędów jest często przewidywalne i poddają się one analizie statystycznej (nie mają wpływu na wartość średniej liczonej z wielu pomiarów).
- Błędy systematyczne – są to błędy spowodowane przez czynnik (instrument, metoda), który nie zmienia się w trakcie pomiarów. Powodują systematyczne odchylenie pomiarów od wartości prawdziwej. Nie poddają się analizie statystycznej (wartość średnia wyliczona z wielu pomiarów również będzie obciążona tymi błędami). Nie są uwzględniane w oszacowaniu niepewności pomiarowej. Czasem są bardzo trudne do wykrycia i oszacowania.
- Błąd gruby/człowieka – błąd wynikający z pomyłki, źle wykonanej pracy, błędnego zadziałania sprzętu. Pomiar z błędem grubym znacząco odbiega od pozostałych pomiarów. Pomiary obarczone błędami grubymi należy odrzucać z serii pomiarowych.

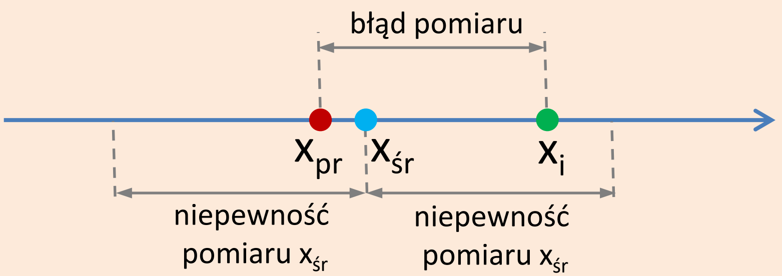
Przyczyny błędów w pomiarach



Błąd i niepewność pomiaru

Te dwa terminy oznaczają:

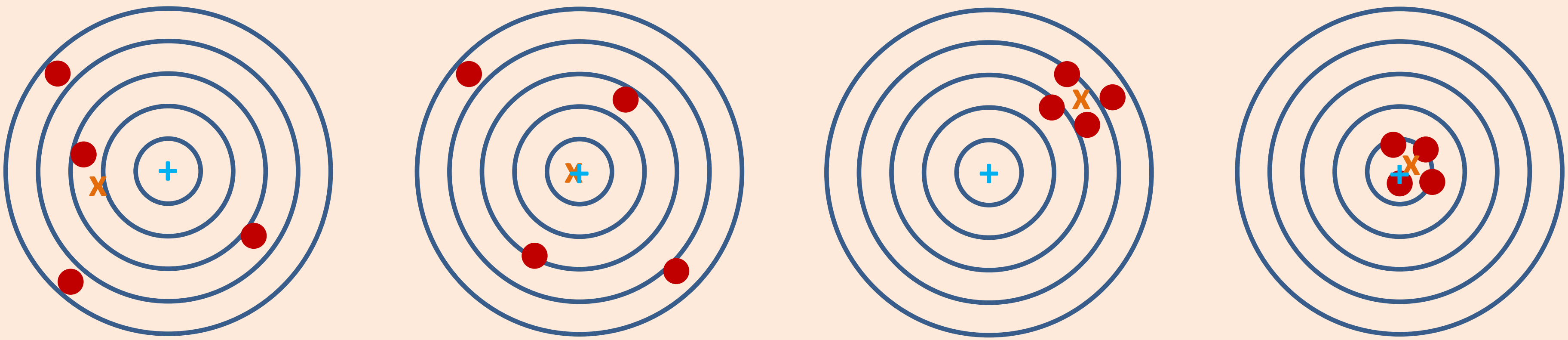
- Błąd pomiaru (błąd prawdziwy) – różnica między wartością zmierzoną a wartością prawdziwą (wzorcową, oczekiwaną). Błąd pomiaru jest nieznany. Gdybyśmy go znali, poprawka pomiaru na błąd byłaby prosta.
- Niepewność pomiaru – przedział, w którym z pewnym prawdopodobieństwem znajduje się prawdziwa wartość wielkości mierzonej. Niepewność tę możemy oszacować.



x_{pr} – wartość prawdziwa
$x_{śr}$ – oszacowanie wartości prawdziwej uzyskane w wyniku pomiarów
x_i – pojedynczy pomiar

Precyzja i dokładność pomiaru

- Pomiar precyzyjny – kolejne pomiary są bliskie siebie, ale niekoniecznie są bliskie wartości prawdziwej.
  (inaczej: błędy przypadkowe są małe).
- Pomiar dokładny – średnia z zestawu pomiarów jest bliska wartości prawdziwej.
  (inaczej: błędy systematyczne są małe)

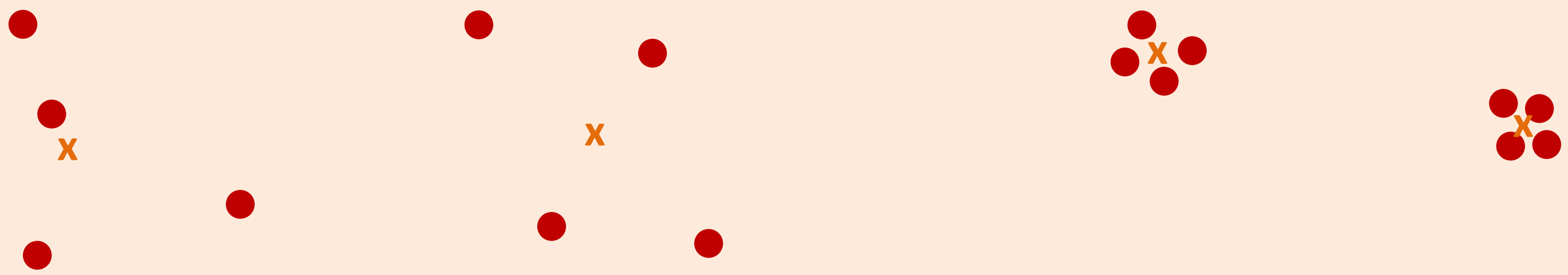


niska precyzja **niska dokładność**	**niska precyzja** **wysoka dokładność**	**wysoka precyzja** **niska dokładność**	**wysoka precyzja** **wysoka dokładność**

na powyższych rysunkach: ● - pojedynczy pomiar, x - wartość średnia, + - wartość prawdziwa

Precyzja i dokładność pomiaru

- Pomiar precyzyjny – kolejne pomiary są bliskie siebie, ale niekoniecznie są bliskie wartości prawdziwej.
  (inaczej: błędy przypadkowe są małe).
- Pomiar dokładny – średnia z zestawu pomiarów jest bliska wartości prawdziwej.
  (inaczej: błędy systematyczne są małe)



niska precyzja	**niska precyzja**	**wysoka precyzja**	**wysoka precyzja**
dokładność ?	**dokładność ?**	**dokładność ?**	**dokładność ?**

wersja bardziej rzeczywista: nie znamy wartości prawdziwej, więc trudniej określić dokładność pomiaru (czy wartość średnia jest bliska prawdziwej)

Jak oszacować wartość prawdziwą i błąd pomiaru?

Załóżmy teraz, że istotne są tylko błędy przypadkowe, a systematyczne są do zaniedbania (w jakiś sposób udało nam się je wykryć i zminimalizować).

Wykonujemy analizę statystyczną pomiaru wielokrotnego. Jeśli mamy pewność, że wielkość, którą mierzymy, jest za każdym razem rzeczywiście tą samą wielkością, to wielokrotna powtórzenie pomiaru pozwoli:

- lepiej oszacować, jaka może być wartość prawdziwa
- poznać niepewność naszych pomiarów

Przykład: wyznaczenie okresu wahadła (T)

Kolejne pomiary okresu wahań stoperem dają:

$$x_i = [4.23, 4.04, 3.89, 4.01, 4.05, 3.96, 3.81, 4.06, 4.41, 3.91]\ \text{s}$$

Co chcielibyśmy wiedzieć:

- najlepsze przybliżenie wartości prawdziwej okresu T
- najlepsze przybliżenie błędu pojedynczego pomiaru
- niepewność z jaką znamy przybliżenie wartości prawdziwej

Analiza statystyczna pomiarów

$$x_i = [4.23, 4.04, 3.89, 4.01, 4.05, 3.96, 3.81, 4.06, 4.41, 3.91]\ \mathrm{s}$$

Najlepszym przybliżeniem wartości prawdziwej (zwykle) jest **wartość średnia**:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \approx x_{prawdziwa}$$

W naszym przykładzie (nie stosujemy na razie zaokrąglania do cyfr znaczących):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{10}}{10} = 4.03700\ s$$

Uwage:

> Średnia nie jest wartością prawdziwą. Średnia może stanowić najlepsze przybliżenie tej wartości.

Analiza statystyczna pomiarów

$$x_i = [4.23, 4.04, 3.89, 4.01, 4.05, 3.96, 3.81, 4.06, 4.41, 3.91]\ \mathrm{s}$$

$$\bar{x} = 4.03700\ \mathrm{s}$$

Jak różnią się poszczególne pomiary od wartości średniej? O tym informują nas **odchylenia** (residua):

$$d_i = x_i - \bar{x}$$

Małe odchylenia oznaczają pomiar precyzyjny.

W naszym przykładzie (nie stosujemy na razie zaokrąglania do cyfr znaczących):

$$d_i = [0.19300, 0.00300, -0.14700, -0.02700, 0.01300, -0.07700, -0.22700, 0.02300, 0.37300, -0.12700]$$

Czy średnia z odchyleń będzie przybliżeniem błędu (analogicznie do średniej z pomiarów)? Nie, średnia z odchyleń nie zawiera żadnej informacji, ponieważ zawsze:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i = 0$$

Uwaga:

Odchylenia nie są błędami pomiarowymi. Mogą one posłużyć do obliczenia niepewności pomiarowych (czyli przybliżenia błędów pomiarowych).

Analiza statystyczna pomiarów

Sposobem na obejście tego problemu jest średnia z wartości bezwzględnych, tzw. średnie odchylenie.

$$\alpha = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|d_i| = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \bar{x}|$$

Nie jest jednak ono stosowane w analizie statystycznej pomiarów. Zwykle stosuje się pierwiastek z sumy kwadratów odchyleń, czyli **odchylenie standardowe**:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$$

Uwaga: σ^2 to tzw. wariancja

W naszym przykładzie (nie stosujemy na razie zaokrąglania do cyfr znaczących):

$$\sigma_x = 0.174168 \text{ s}$$

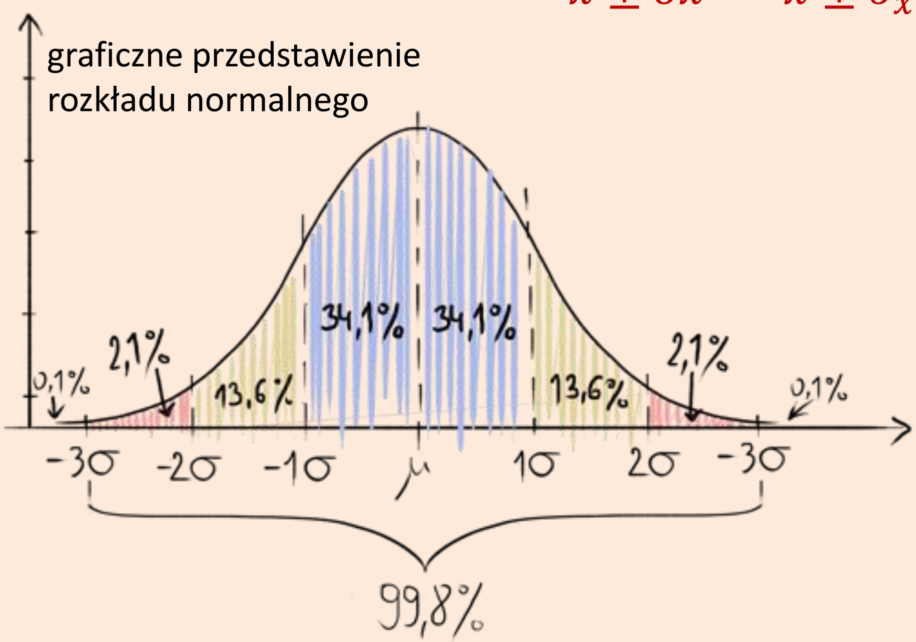
Analiza statystyczna pomiarów

Jakie jest znaczenie odchylenia standardowego? Jeśli mierzymy jakąś wielkość wielokrotnie tą samą metodą i jeśli błędy są zawsze <u>wyłącznie przypadkowe</u> to:

- Kolejne pomiary będą rozłożone dookoła wartości prawdziwej zgodnie z rozkładem normalnym (Gausa).
- Około 68% tych wyników będzie odległych od wartości prawdziwej o nie więcej niż $\pm 1\sigma_x$
- lub inaczej: pojedynczy pomiar z prawdopodobieństwem 68% będzie różnił się od wartości prawdziwej o nie więcej niż $\pm 1\sigma_x$

Przyjmujemy zatem, że $\boldsymbol{\sigma_x}$ **jest niepewnością dla pojedynczego pomiaru**:

$$x \pm \delta x \ \rightarrow x \pm \sigma_x$$



funkcja opisująca rozkład normalny

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma}\right)$$

Analiza statystyczna pomiarów

Jaka będzie niepewność pomiarowa wartości średniej? Niepewność ta wynosi:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}$$

i nazywana jest **odchyleniem standardowym średniej**.

Powyższy wzór pokazuje, że wykonanie większej liczby pomiarów zmniejsza $\sigma_{\bar{x}}$. Nie można jednak osiągnąć dowolnie małej niepewności pomiarowej wartości średniej zwiększając liczbę pomiarów. Taka procedura zmniejsza jedynie wpływ błędów przypadkowych. **Nie ma jednak wpływu na błąd systematyczny** (o tym za chwilę).

Ostatecznie możemy zapisać wynik analizy statystycznej pomiarów jako:

$$\boldsymbol{\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}}$$

W naszym przykładzie (nie stosujemy na razie zaokrąglania do cyfr znaczących):

$$\sigma_{\bar{x}} = 0.0550767 \text{ s}$$

Końcowy wynik zapiszemy następująco (po zaokrągleniu do cyfr znaczących):

$$T = 4.037 \pm 0.055 \text{ s}$$

Błędy systematyczne

Konieczne jest wyszukanie i zredukowanie błędów systematycznych. Zadanie to może nie być proste. Nie ma uniwersalnego podejścia do tego typu błędów.

Możliwym źródłem jest dokładność urządzenia pomiarowego (czasem jest ona podana; można też porównać urządzenia między sobą lub z urządzeniem „wzorcowym”, żeby ocenić błąd systematyczny).

Jeśli uda nam się określić wartość błędu systematycznego to ostateczny wynik można zapisać na dwa sposoby:

$$x \pm \delta x_{przypadkowy} \pm \delta x_{systematyczny}$$

lub

$$x \pm \delta x, \quad \text{gdzie } \delta x = \sqrt{(\delta x_{przypadkowy})^2 + (\delta x_{systematyczny})^2}$$

To drugie wyrażenie nie jest jednak ściśle uzasadnione, jak jest to w przypadku opisu matematycznego błędów przypadkowych.

Wniosek: zwiększanie liczby pomiarów zmniejsza niepewność pomiarową wartości średniej związaną z błędami przypadkowymi, ale nie ma wpływu na niepewność związaną z błędami systematycznymi. Jeśli chcemy zredukować niepewność całkowitą, to musimy też jakoś zmniejszyć błędy systematyczne.

Błędy systematyczne

Szukamy błędów:

- uważne wykonanie / sprawdzenie obliczeń
- sprawdzenie czy porównujemy nasz wynik z odpowiednią wartością uznaną (lub policzoną przez kogoś innego)
- sprawdzenie czy instrument pomiarowy nie powoduje większych błędów systematycznych niż przyjęliśmy
- sprawdzenie czy użyliśmy właściwych wartości parametrów potrzebnych do obliczeń (np. stałych fizycznych)
- sprawdzenie czy nie popełniliśmy błędu w zaprojektowaniu eksperymentu, poprzez zaniedbanie jakiegoś czynnika, który wpływa na wynik

możliwe źródła błędu systematycznego

Poszukiwanie źródeł błędów systematycznych może być zajęciem detektywistycznym. Jednak czasem nie udaje się wszystkich zidentyfikować, pomimo włożonego w to wysiłku.

Analiza statystyczna pomiarów

Dodatek A

W niektórych przypadkach zamiast zwykłej średniej, konieczne jest wyznaczenie tzw. średniej ważonej. Stosuje się ją wtedy, kiedy kolejne pomiary wielkości mierzonej nie są wykonane z tą samą precyzją (mają różne niepewności).

- pomiary: $x_i = [x_1, x_2, x_3, \cdots, x_N]$
- niepewności pomiarowe: $\sigma_i = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_N]$
- wagi statystyczne: $w_i = \left[\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)^2, \left(\frac{1}{\sigma_2}\right)^2, \left(\frac{1}{\sigma_3}\right)^2, \dots, \left(\frac{1}{\sigma_N}\right)^2\right]$
- średnia ważona: $x_{śrw} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_N x_N}{w_1 + w_2 + \cdots + w_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} w_i}$

Pomiary mające mniejszą niepewność, mają większą wagę (ważność) i bardziej decydują o wartości średniej.

Analiza statystyczna pomiarów

Dodatek B

Niektóre źródła podają, że przy mało licznym zestawie pomiarów (poniżej 10 pomiarów, mała próba) analiza statystyczna może być następująca:

- wartość średnia: $x_{śr} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$
- zakres (rozrzut): $R = x_{max} - x_{min}$
- niepewność jednego pomiaru: $\delta x = \frac{R}{2}$ („odpowiednik" odchylenia standardowego)
- niepewność wartości średniej: $\delta x_{śr} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}}$ („odpowiednik" odchylenia standardowego średniej)
- końcowy zapis wyniku: $x_{śr} \pm \delta x_{śr}$

gdzie:

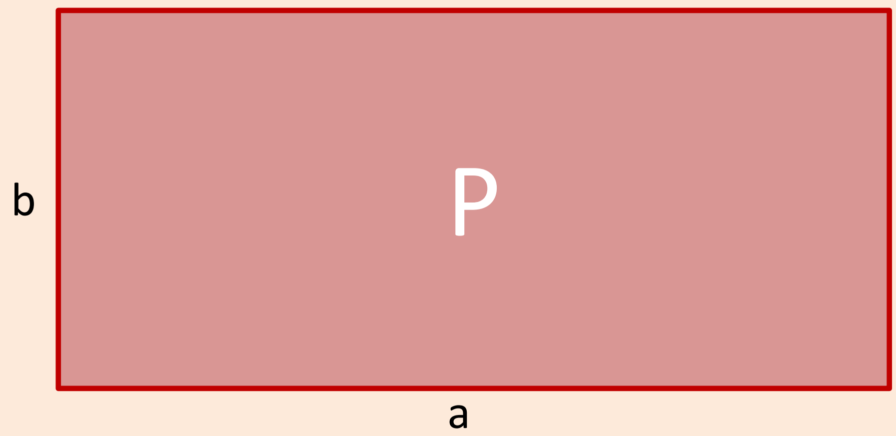
N – liczba pomiarów,

x_{max}, x_{min} – maksymalny i minimalny pomiar w całej próbie

Przenoszenie błędów

Rozważmy taki przykład:

Mierzymy długości boków prostokąta a i b. Każdą z tych wielkości znamy z pewną niepewnością. Jeśli z tych pomiarów obliczmy obwód (L) i pole prostokąta (P), to jaką niepewnością będą obciążone te wielkości?



Możemy to obliczyć dzięki analizie przenoszenia błędów. Dodatkowym efektem tej analizy jest możliwość wskazania źródeł dominującego błędu obliczanej wielkości i następnie zredukowania ich.

Przenoszenie błędów (metoda liniowa)

Boki prostokąta mają wymiary: $a = 1.25 \pm 0.21\ \mathrm{cm}$, $b = 4.41 \pm 0.28\ \mathrm{cm}$

Należy wyznaczyć :

- obwód: $L = 2(a + b)$
- powierzchnię: $P = a \cdot b$
- oraz ich niepewności: δL, δP (σ_L, σ_P)

Największa prawdopodobna wartość:

$$L^{+} = L + \delta L = 2\big((a + \delta a) + (b + \delta b)\big) = \underbrace{\boxed{2(a + b)}}_{L} + \underbrace{\boxed{2(\delta a + \delta b)}}_{\delta L}$$

Najmniejsza prawdopodobna wartość:

$$L^{-} = L - \delta L = 2\big((a - \delta a) + (b - \delta b)\big) = \boxed{2(a + b)} - \boxed{2(\delta a + \delta b)}$$

Stąd:

$$\delta L = 2(\delta a + \delta b)$$

W naszym przykładzie:

$$L = 11.32 \pm 0.98\ \mathrm{cm}$$

Przenoszenie błędów (metoda liniowa)

Boki prostokąta mają wymiary: $a = 1.25 \pm 0.21$ cm, $b = 4.41 \pm 0.28$ cm

Należy wyznaczyć :

- obwód: $L = 2(a + b)$
- powierzchnię: $P = a \cdot b$
- oraz ich niepewności: δL, δP (σ_L, σ_P)

Największa prawdopodobna wartość:

$$P^+ = P + \delta P = (a + \delta a) \cdot (b + \delta b) = ab\left(1 + \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta a \cdot \delta b}{ab}\right)$$

Najmniejsza prawdopodobna wartość:

$$P^- = P - \delta P = (a - \delta a) \cdot (b - \delta b) = ab\left(1 - \frac{\delta a}{a} - \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta a \cdot \delta b}{ab}\right)$$

Stąd:

$$\delta P = \frac{1}{2}(P^+ - P^-) = \overset{P}{\boxed{ab}}\left(\frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}\right)$$

W naszym przykładzie:

$$P = 5.5 \pm 1.3 \text{ cm}^2$$

Przenoszenie błędów

Przedstawiona przed chwilą metoda (*liniowego przenoszenia błędów*) może zawyżać niepewność wyniku końcowego. Metoda ta zakłada, że we wszystkich pomiarach mylimy się w tę samą stronę (przeszacowując o $+\delta x$ lub niedoszacowując o $-\delta x$). Takie zdarzenie, chociaż możliwe, jest dość mało prawdopodobne, o ile:

- Jeśli niepewności pomiarów są przypadkowe (podlegają rozkładowi normalnemu)
- Mierzone wielkości są od siebie niezależne (błędy występujące w jednej z mierzonych wielkości nie wpływają na błędy pozostałych)

W takim przypadku niepewność wielkości obliczanej z tych pomiarów wyznaczymy z reguły *kwadratowego przenoszenia błędów*. Metoda ta dopuszcza możliwość częściowego zniesienia się błędów kilku pomiarów składających się na wynik końcowy.

Przenoszenie błędów

Rozważmy przypadek wyznaczania wielkości zależnej od dwóch zmiennych: $f(x, y)$

Wielkości mierzone i ich niepewności: $x \pm \delta x, y \pm \delta y$

Wyznaczyć trzeba niepewność: δf

W analizie konieczne jest obliczenie pochodnych cząstkowych. Wyrażenie na δf:

$$\delta f = \sqrt{\left(\underset{\substack{\text{niepewność}\\ \text{wynikająca}\\ \text{tylko z } \delta x}}{\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\delta x}}\right)^2 + \left(\underset{\substack{\text{niepewność}\\ \text{wynikająca}\\ \text{tylko z } \delta y}}{\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}\delta y}}\right)^2}$$

- pochodna cząstkowa po x: $\frac{\partial f}{\partial x}$ (y traktujemy jak stałą)
- pochodna cząstkowa po y: $\frac{\partial f}{\partial y}$ (x traktujemy jak stałą)

Jeśli wielkość, którą obliczamy zależy od jednej zmiennej, liczymy zwykłą pochodną.

- funkcja jednej zmiennej: $f(x)$
- pochodna zwykła po x: $\frac{df(x)}{dx}$

Przenoszenie błędów

W naszym przykładzie:

Obwód: $L = 2(a + b)$

Pochodna po a: $\frac{\partial L}{\partial a} = 2$

Pochodna po b: $\frac{\partial L}{\partial b} = 2$

Niepewność wynikająca tylko z δa: $\left|\frac{\partial L}{\partial a}\right| \delta a = 0.42$

Niepewność wynikająca tylko z δb: $\left|\frac{\partial L}{\partial b}\right| \delta b = 0.56$ (ta niepewność nieznacznie dominuje)

Niepewność całkowita: $\delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial b}\delta b\right)^2} = 0.70$

Wynik końcowy: $L = 11.32 \pm 0.70 \text{ cm}$

w metodzie liniowej było: $L = 11.32 \pm 0.98 \text{ cm}$

Przenoszenie błędów

W naszym przykładzie:

Pole: $P = a \cdot b$

Pochodna po a: $\frac{\partial P}{\partial a} = b$

Pochodna po b: $\frac{\partial P}{\partial b} = a$

Niepewność wynikająca tylko z δa: $\left|\frac{\partial P}{\partial a}\right| \delta a = 0.93$ (ta niepewność dominuje)

Niepewność wynikająca tylko z δb: $\left|\frac{\partial P}{\partial b}\right| \delta b = 0.35$

Niepewność całkowita: $\delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial a}\delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial b}\delta b\right)^2} = 0.99$

Wynik końcowy: $\mathrm{P} = 5.51 \pm 0.99\ \mathrm{cm}^2$

w metodzie liniowej było: $\mathrm{P} = 5.5 \pm 1.3\ \mathrm{cm}^2$

Przenoszenie błędów

Ogólny wzór przenoszenia błędów umożlwiający oszacowanie niepewności obliczanej wielkości, która zależy od N zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_N$ (niezależnych od siebie):

- wielkość obliczana: $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$
- niepewności poszczególnych zmiennych: $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N$
- niepewność wyznaczenia wielkości obliczanej:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\delta x_N\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2}$$

Kroki do wykonania, aby otrzymać δf i zapisać końcowy wynik:

- Ustal od jakich zmiennych x_i zależy wielkość obliczana f oraz jaka jest postać funkcji opisującej tę zależność i jakie są niepewności δx_i
- Zapisz postać wszystkich potrzebnych pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}$
- Oblicz i posumuj wszystkie wyrażenia $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta x_i\right)^2$
- Wyciągnij pierwiastek z powyższej sumy
- Zaokrąglij: δf do dwóch cyfr znaczących, a końcowy wynik f zgodnie z zaokrąglonym δf
- Zapisz końcowy wynik w formie $f \pm \delta f$